DEVOIR DE RENTRÉE
CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 8 points. Les 8 points sont donnés pour un programme correct, quelques points pour des idées inabouties.

Exercice 2 : 35 points.

1. 2 points, toutes les méthodes sont acceptables (calcul du noyau, remarquer que des colonnes sont colinéaires, pivot,...).
2. 2 points, seule la syntaxe est évaluée.
3. **a.** 4 points, voir question **1**.
   b. 2 points, méthode de la caractérisation abstraite absolument (0 point si les propriétés à vérifier ne sont pas connues).
   c. 6 points, 2 point par résolution de système.
   d. 3 points, 1 pour poser le problème et savoir quel système il faut résoudre, 2 pour la résolution du système.
   e. 3 points, on résout le pivot.
4. 4 points, 2 pour le calcul de P^{-1}, 2 pour le calcul du produit.
5. **a.** 1 point, il suffit de deviner les bonnes valeurs de a et b.
   b. 2 points, question de calcul.
6. **a.** 3 points, les fautes de langage sont lourdement pénalisées.
   b. 3 points.

Exercice 3 : 46 points barème (presque) officiel.

1. **a.** 4 points, 1 pour la justification de la dérivabilité, 1 pour le calcul de la dérivée, 1 pour l'étude de signe, 1 pour les limites. 0 si incompatibilité variations/limites.
   b. 2 points, 1 seulement si on vérifie seulement que $u_n > 0$, 0 si la propriété à montrer est mal énoncée.
2. **a.** 4 points, pas de justification demandée, 3 seulement si < au lieu de <=.
   b. 4 points, 2 pour comprendre ce que donne le programme, 2 pour la conjecture sur les différents comportements des suites extraites.
   c. 4 points, aucun commentaire demandé, 3 si erreur dans le `range`, 1 point facile.
3. **a.** 3 points, 0 s'il manque une des hypothèses pour appliquer le théorème de la bijection.
   b. 3 points, 1 seulement si le raisonnement par équivalence n'est pas explicite, -1 point pour l'oubli de $0 \in]-\infty, 1]$.
   c. 3 points, 1 pour $\alpha < 1$, 2 pour l'autre inégalité.
4. **a.** 1 point.

Date: 3 Septembre 2024 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

b. 3 points (soit une récurrence correcte, soit pour dire que $u_0 < u_2$ et f^2 croissante).

c. 3 points.

5. **a.** 2 points, 1 pour l'expression correcte (ne pas confondre $f \circ f$ et $x \mapsto f(x)^2$), 1 pour la simplification.

b. 2 points, 1 pour la continuité sur $]0, +\infty[$, 1 pour la continuité en 0.

c. 3 points, 1 seulement si on ne montre pas le "exactement".

d. 2 points, 1 seulement si on ne mentionne pas la continuité de f.

6. 3 points, 2 pour montrer qu'elle n'est pas majorée, 1 pour en déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 : 29 points.

1. **a.** 2 points, 1 pour reconnaître la bonne loi dans le contexte, 1 pour les paramètres.

b. 2 points, 1 pour chaque. Il suffit de connaître la définition de la binomiale.

c. 1 point, une explication vague suffit.

d. 1 point, la seule réponse suffit.

e. 3 points, 1 pour la formule du crible, 2 pour le calcul.

2. 2 points, 1 pour l'intersection, 1 pour la suite décroissante d'événements.

3. **a.** 6 points, 2 pour chaque ligne à compléter.

b. 5 points, toute tentative rapporte facilement 2 points.

4. 1 point, la réponse seule suffit.

5. 2 points, 1 pour la seule mention de l'incompatibilité d'événements.

6. 4 points, 2 pour la loi, 2 pour l'espérance (question difficile).

Total : 118 points. Le total obtenu est divisé par 4 (et arrondi au 1/2 point supérieur) pour faire une note sur 20 (il y a 29.5 points à prendre).

Commentaires généraux/erreurs fréquentes.

Rédaction / Stratégie.

- Les raisonnements par équivalence sont risqués, souvent faux et maladroits du point de vue de l'expression logique.
- Il est préférable de dire explicitement qu'on admet un résultat d'une question pour poursuivre. Ignorer la question ou (pire) faire semblant de l'aborder en répétant quelques hypothèses n'est jamais une bonne stratégie. Un correcteur déteste avoir l'impression qu'on essaye de l'arnaquer.
- Dans les barèmes de notation, une preuve juste + une preuve fausse = 0 point. Lorsque deux idées se présentent pour aborder une question, il faut en choisir une.
- Il faut apprendre et citer le nom des théorèmes.
- Il est pénalisé de mettre des hypothèses inutiles lorsqu'on cherche à appliquer un théorème.
- Il existe "des suites qui tendent vers ..." ou "des limites qui sont égales à ..." mais pas "des limites qui tendent vers ...".
- On ne peut démontrer des propriétés par récurrence que lorsqu'elle dépendent de n. Montrer par récurrence que "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie" n'en fait pas partie (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet qui ne dépend pas de n).
- Il faut absolument prendre l'habitude de soigner son expression. Les confusions entre les différents objets sont lourdement pénalisées (voir quelques exemples dans les commentaires des exercices 2 et 4).
- Lorsqu'une question commence par "en déduire que", il est absolument indispensable d'utiliser la question précédente. Toute autre démarche est vouée à l'échec.

- "admettre" un résultat signifie que on se donne le droit de l'utiliser sans l'avoir démontré, ce n'est donc jamais la conséquence d'une preuve.
- Il faut arrêter de répondre n'importe quoi à toute une série de question en essayant de deviner maladroitement ce qui semble le plus plausible. Rédiger correctement est difficile, c'est un des objectifs de cette année. Mais l'affirmation péremptoire de réponses sans commentaire ne peut pas être considéré comme satisfaisant et fait très mauvais effet auprès du correcteur.

Exercice 1. Cet exercice est tiré du cahier de vacances. Les étudiants n'ayant pas eu le courage de dépasser la moitié du carnet en deux mois d'été doivent se mettre au travail *d'urgence*.

Exercice 2.

- Pour montrer qu'une matrice est inversible par la méthode du pivot, il n'est pas nécessaire de manipuler la matrice de droite qui sert à calculer l'inverse.
- Pour conclure qu'un seul vecteur est une base d'un espace vectoriel, il faut dire qu'il n'est pas nul.
- Montrer que ... est un sous-espace vectoriel est une question de cours ! (donc facile).
- Beaucoup d'erreurs de calcul dans la résolution des systèmes de la question **3.c**, puis dans le calcul de P^{-1}.
- Des erreurs de langage tout au long de l'exercice, des confusions sur la nature des objets (par exemple très courant un espace vectoriel est *égal* à un vecteur). Attention à bien prendre conscience de la nature des choses dont vous parlez

Exercice 3.

- On ne peut pas se permettre de se rater dans une calcul de dérivée aussi simple (question **1.a**). Les étudiants qui se sont trompés doivent passer du temps à refaire des calculs de dérivée.
- Il faut expliquer pourquoi une fonction est dérivable avant de la dériver. Si c'est la première fois de votre composition, il ne faut pas avoir peur de mettre beaucoup de détails. Je rappelle que le quotient de fonctions dérivables n'est pas dérivable a priori, il faut pour ça que le dénominateur ne s'annule pas, et vous devez justifier la dérivabilité de la fonction en montrant qu'effectivement le dénominateur ne s'annule pas.
- La question **1.b** a été très mal comprise. Le problème de décider si une suite récurrente est bien définie consiste à montrer que u_n est toujours dans l'ensemble de définition de f (pour pouvoir appliquer f à u_n et fabriquer u_{n+1}). C'est ce type d'explications qu'on s'attend à trouver dans une copie.
- Les questions d'informatique sont souvent ignorées. C'est une très mauvaise stratégie. L'écriture d'un programme complet pose énormément de problèmes.
- Lorsqu'on cherche une solution à l'équation $f(x) = x$, on n'applique pas le théorème de la bijection à f.
- Mentionner les croissances comparées alors que c'est inutile dans un calcul de limite fait perdre des points.
- Il faut annoncer clairement les propriétés qu'on veut démontrer par récurrence. Ne pas écrire $\mathcal{P}_n$ est pénalisé.
- Lorsqu'une fonction (comme h dans la question **5**) est définie par une formule pour $x > 0$ et par une valeur donnée $h(0)$ en 0, le seul moyen de prouver la continuité en 0 consiste à montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$.
- Personne n'a compris l'intérêt des deux programmes informatiques dans l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela conduit à affirmer des choses fantaisistes sur le comportement asymptotique de la suite.

Exercice 4.

1. Pour citer une loi de proba, il faut donner les paramètres et il y en a 2 dans le cas de la loi binomiale.
2. Pour justifier qu'une variable suit la loi binomiale, il faut impérativement dire qu'elle compte le nombre de succès dans une répétition d'épreuve de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès. S'il manque l'un de ces mots-clés, la justification n'est pas complète.
3. Une variable aléatoire est un nombre. Ainsi dire que "X_n est une succession d'épreuves de Bernoulli" est absurde.
4. Une probabilité est un nombre, un événement est un ensemble. Toute phrase qui mélange les deux est forcément fausse et fait très mauvais effet. Il n'y a pas d'intersection de probabilités, ni de somme d'événements. Il faut prendre le réflexe de s'assurer que ce n'est pas ce qu'on écrit.
5. La réponse à la question **1.b** doit s'inspirer de celle de la question **1.a**. C'est souvent le cas. En particulier une paraphrase pour expliquer quel est l'événement dont on cherche la proba n'est évidemment pas ce qu'on attendait.
6. La question **6** et la première ligne du programme à trous étaient les deux seules questions difficiles dans tout le sujet.

Correction détaillée.

Correction 1

```python
import numpy.random as rd

def spot():
  spot_allume = 1
  temps = 1
  while spot_allume != 2 :
    if spot_allume == 1 :
      spot_allume = rd.random(1,5)
    else :
      spot_allume -= 1
    temps +=1
  return temps
```

Correction 2

1. Le plus simple est de constater que les colonnes 1 et 3 sont identiques. L'image de A est donc de dimension au plus 2 et la matrice n'est pas inversible.
2.

```python
import numpy as np

A = numpy.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
print(A)
```

3. **a.** On a
$$A-5I=\begin{pmatrix}-4&3&1\\3&-6&3\\1&3&-4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A+4I=\begin{pmatrix}5&3&1\\3&3&3\\1&3&5\end{pmatrix}.$$
Puis on s'aperçoit que, dans la matrice $A-5I$, la somme des trois colonnes donne la colonne nulle, $C_1+C_2+C_3=0$, ce qui signifie par exemple que la colonne 3 est une combinaison linéaire des deux autres et que l'image est de dimension au plus 2. Pour la matrice $A+4I$, on peut constater que $C_2=-\frac{1}{2}(C_1+C_3)$. On conclut à l'identique.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de "voir" ces deux relations pour traiter la question. On aurait pu aussi tenter d'inverser ces deux matrices avec la méthode du pivot, trouver un pivot nul au cours du calcul, et conclure aussi que les matrices ne sont pas inversibles.

b. C'est une question de cours ! Le noyau de n'importe quelle matrice est un sous-espace vectoriel. À savoir absolument redémontrer !

c. Il s'agit maintenant de décrire explicitement ces trois noyaux. Comme d'habitude, trouver une base du noyau d'une matrice revient à résoudre un système. Pour $E_0(A)$, on a en effet

$$
\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) &\iff AX = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 3y + z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 3y + z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 3y + z &= 0 \\ -10y &= 0 \end{cases} (L_2 - 3L_1) \\
&\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On conclut alors que $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de $E_0(A)$ car un seul vecteur non nul est une famille libre.

On traite de même les deux autres noyaux (attention aux erreurs de calcul !)

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5(A) &\iff (A-5I)X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -4x+3y+z &= 0 \\ 3x-6y+3z &= 0 \\ x+3y-4z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 15y-15z &= 0 (L_1+4L_3) \\ -15y+15z &= 0 (L_2-3L_3) \\ x+3y-4z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= z \\ x &= z \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On conclut alors que $E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de $E_5(A)$ car un seul vecteur non nul est une famille libre. De même, sans répéter tout le calcul, on trouve que $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de $E_{-4}(A)$ car un seul vecteur non nul est une famille libre.

Nous avons bien montré que les trois espaces $E_0(A)$, $E_5(A)$ et $E_{-4}(A)$ sont de dimensions 1. Au cours du calcul précédent, nous avons aussi montré que

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d. Puisque la famille (U, V, W) contient trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre pour justifier que c'est une base. Soit alors α, β et γ tels que

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout le système d'inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \beta-2\gamma &= 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma &= 0 \end{cases}$$

L'opération $(L_1 - L_3)$ montre que $\alpha = 0$. Puis $(L_2 - L_3)$ donne $\gamma = 0$ et enfin $\beta = 0$ avec la ligne 2 par exemple.

Puisque la seule solution de ce système est $(0,0,0)$, cela permet bien de conclure que la famille (U,V,W) est libre.

e. *Voir la correction en classe.*

4. C'est une question de calcul, que je ne détaille pas. On a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode du pivot donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

et le calcul du produit donne

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. **a.** On constate que A s'obtient en prenant $a = 1$ et $b = 3$.

b. Il suffit de faire le calcul, maintenant que P^{-1} est connu. On trouve

$$P^{-1}M(a,b)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b \end{pmatrix}.$$

On remarque que $P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.

6. **a.** D'après la relation précédente ("inversée"), on a

$$M(a,b) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il est classique de montrer qu'alors

$$M(a,b)^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b \end{pmatrix}^n P^{-1}.$$

On peut par exemple démontrer ça par récurrence sur n. Or les puissances d'une matrice diagonale sont très faciles à obtenir. En effet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2a+b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2a-2b)^n \end{pmatrix}.$$

Cela donne donc une façon de calculer les puissances de $M(a,b)$:

$$M(a,b)^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2a+b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2a-2b)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

b. On peut implémenter cette stratégie en un programme Python

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def puissance M(a,b,n) :
  D = np.array([[0,0,0],[0,(2*a+b)**n
    ,0],[0,0,(2*a-2*b)**n]])
  P = np.array([[1,1,1],[0,1,-2],[-1,1,1]])
  M = np.dot(P,np.dot(D, al.inv(P)))
  return M
```

Correction 3

Une très belle correction (écrite par Tom Dutilleul) se trouve à la page https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EML23cor.pdf. Attention le sujet original comporte une erreur d'énoncé dans la 2ème fonction Python, la correction proposée tient compte de la modification nécessaire du sujet.

Correction 4

1. **a.** En interprétant comme succès "le jeton est placé dans l'urne 1 (dont la probabilité est égale à $1/3$) (resp. l'urne 2, l'urne 3)", la variable X_n (resp. Y_n, Z_n) correspond à une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. On peut donc conclure que X_n, Y_n et Z_n suivent toutes trois une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$.

b. On connait précisément la loi d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale. On a

$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \text{et} \quad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

c. L'événement $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)$ décrit la situation où après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun. On a donc placé tous les n jetons dans l'urne 1, c'est-à-dire que $(X_n = n)$.

d. On a $V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$.

e. Par la formule du crible, on a

$$\begin{aligned} P(V_n) \quad = \quad & P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) \\ & - P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) - P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)) - P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \\ & + P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \end{aligned}$$

Les trois urnes ne peuvent pas être vides simultanément donc l'événement $(X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)$ est l'événement impossible et

$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = 0.$$

Par ailleurs, d'après le raisonnement de la question **c.**, on peut calculer les probabilités des intersections doubles. En effet,

$$P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et de même

$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) = P((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On obtient bien

$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On peut écrire l'événement V comme l'intersection
$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$
En effet si une urne reste toujours vide, V_n est réalisé pour tout n. Or la suite d'événements V_n est décroissante au sens de l'inclusion
$$V_{n+1} \subset V_n$$
car si une urne est vide au moment $n+1$, elle était déjà vide au moment n. Par le théorème de la limite monotone, on obtient donc
$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 0.$$
car les deux suites géométriques $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_n$ et $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_n$ convergent vers 0.

3. **a.**

```python
import numpy.random as rd

def T():
  X=0
  Y=0
  Z=0
  n=0
  L=[X,Y,Z]
  while L[0] == 0 | L[1] == 0 | L[2] == 0 :
    i = rd.randint(0,3)    #  choix d'un nombre entier entre 0 et 2
    L[i] = L[i] + 1
    n = n+1
  return n
```

On rappelle qu'en Python, l'opérateur | est un "ou" logique et la condition

```python
L[0] == 0 | L[1] == 0 | L[2] == 0
```

teste si l'une (au moins) des conditions L[0] == 0, L[1] == 0 ou L[2] == 0 est réalisée. Une autre façon de décrire cette même condition aurait été d'écrire

```python
while L[0]*L[1]*L[2] == 0
```

car le produit est nul quand l'un au moins des 3 nombres est nul.

b. On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide de la moyenne empirique d'un échantillon de réalisations de la variable. Ici le sujet propose de fabriquer un échantillon de 10 000 apparitions de la variable T. On peut donc procéder de la manière suivante.

```python
ech = []
for i in range (10000):
  simul=T()
  ech.append(simul)
moyenne = sum(ech) / 10000
print(moyenne)
```

Il y a plusieurs autres options pour créer la liste de simulations de T. On aurait pu par exemple utiliser la commande ech = [0]*10000 qui crée une liste de taille 10 000 remplie de 0, puis changer les 0 en des simulations de T petit à petit avec la boucle for.

Ici, j'ai choisi de créer une liste vide puis de l'étendre d'une case dans chaque passage de la boucle for avec la commande append.

4. Il faut placer au moins 3 jetons pour remplir les 3 urnes mais on peut attendre arbitrairement longtemps. On a donc
$$T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![.$$

5. Pour $n \geqslant 3$, on observe que
$$(T = n) \cup V_n = V_{n-1}.$$
En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : soit il reste encore une urne vide après avoir placé le $n$ième jeton (c'est-à-dire V_n), soit on a rempli toutes les urnes pour la première fois avec le $n$ième jeton (c'est-à-dire $(T = n)$). L'incompatibilité nous permet de séparer l'union des probabilités en somme,
$$P(T = n) + P(V_n) = P(V_{n-1}).$$

6. C'est une question un peu difficile. Il faut commencer par expliciter la loi de T pour en déduire son espérance. D'après la question précédente, on a, pour $n \geqslant 3$,
$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(V_{n-1}) - P(V_n) \\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
On revient ensuite à la définition de l'espérance. La prudence impose de ne pas considérer tout de suite que T admet une espérance, et on cherche à justifier l'existence de l'espérance en même temps que l'on calcule sa valeur. On sait donc que T admet une espérance si et seulement si la série
$$\sum nP(T = n)$$
converge. Or
$$nP(T = n) = n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$
La terme général de la série que l'on étudie apparaît alors comme une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées premières de raisons respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Puisque les deux raisons sont comprises strictement entre 0 et 1, on sait que les séries géométriques dérivées premières convergent. On conclut que T admet une espérance. Puis
$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{k=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(1-2/3)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$